Repetitorium Algebra

Vorbereitung auf die Berufsmatura am BBZG

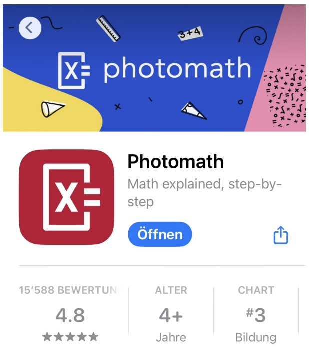
Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Erläuterungen

Der **Orientierungstest** soll Ihnen helfen abzuschätzen, welche algebraischen Kenntnisse an der Berufsmatura im Fach Mathematik vorausgesetzt werden. Insgesamt werden sechs Gebiete geprüft, die zusammen die Grundoperationen der Algebra abdecken: *Addition und Subtraktion*, *Multiplikation*, *Faktorisieren*, *der Bruch*, *Addition und Subtraktion von Brüchen* und *Multiplikation und Division von Brüchen*. Der Mathematikunterricht an de Berufsmatura baut auf diesem Fundament auf. Für Ihren Erfolg ist es daher entscheidend, dass Sie in den erwähnten Gebieten sicher sind. Sie sollten in der Lage sein, die Aufgaben ohne oder mit nur wenigen Fehlern zu lösen.

Falls Ihnen das Lösen der Aufgaben Schwierigkeiten bereitet, empfehlen wir Ihnen dringend dieses **Repetitorium Algebra** zu erarbeiten. Das Repetitorium ist wie der Orientierungstest in die erwähnten sieben Gebiete aufgeteilt. Da die Gebiete aufeinander aufbauen, empfiehlt es sich, die Gebiete der Reihe nach zu erarbeiten. Jedes Gebiet besteht aus einen Theorieteil, erklärenden Beispielen und Übungen. Die Resultate aller Übungen sind im Kapitel Lösungen zu finden. Wenn Sie neben dem Resultat auch auf die Lösungsschritte angewiesen sind, empfiehlt sich die App Photomath. Sie ist kostenlos erhältlich und einfach zu bedienen:



App Photomath (hier im Apple-Appstore)

Alternativ oder ergänzend gibt es neben dem Repetitorium Algebra auch die Möglichkeit, einen Vorbereitungskurs für das Fach Mathematik zu besuchen. Weitere Information zum Vorbereitungskurs erhalten Sie auf dem Sekretariat.

2 Orientierungstest

Addition und Subtraktion

1) Vereinfachen Sie:

$$a^2b - (3ab^2 + ab - (2a^2b - (ab^2 + 2ab)))$$

Multiplikation

2) Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie:

$$(a - b^2)(a - ab + b^2)$$

3) Schreiben Sie mithilfe der binomschen Formeln ohne Klammern und fassen Sie zusammen:

$$(a + b)^2(a - b)$$

Faktorisieren

4) Verwandeln Sie in ein Produkt:

$$-2a^3b^2c + 10a^2bc - 6a^2b^2$$

5) Verwandeln Sie mithilfe der binomschen Formeln in ein Produkt:

$$3a^2 - 3$$

6) Verwandeln Sie nochmals mithilfe der binomschen Formeln in ein Produkt:

$$-24a^2 - 24a - 6$$

Der Bruch

7) Kürzen Sie mithilfe der binomschen Formeln:

$$\frac{a^3 - 2a^2 + a}{ab - b}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

8) Addieren Sie folgende Brüche:

$$\frac{a + b}{a^2 - b^2} + \frac{1}{b - a}$$

9) Subtrahieren Sie folgende Brüche:

$$\frac{2a - b}{12a^2 + 16ab} - \frac{1.5}{9a + 12b}$$

Multiplikation und Division von Brüchen

10) Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\frac{3a^2 - 3c^2}{b^3} : (a^3b^2c - ab^2c^3)$$

11) Vereinfachen Sie nochmals so weit wie möglich:

$$\frac{3 + \frac{3}{a}}{3 - \frac{3}{a^2}}$$

3 Repetitorium Algebra

3.1 Addition und Subtraktion

Da die Subtraktion als Addition mit negagtiven Summanden verstanden werden kann, werden die wichtigsten Regeln folgend nur für die Addition zusammengefasst.

Addition algebraischer Terme

(1) Die Reihenfolge der Summanden spielt bei der Addition keine Rolle. Es gilt das Kommutativgesetz: $a + b = b + a$.

(2) Es können nur gleichartige Summanden addiert werden. Das heisst, zum Summanden ab kann nur ab addiert werden, nicht etwa a, b oder c.

(3) Klammern mit einem positivem Vorzeichen können weggelassen werden. Klammern mit einem negativen Vorzeichen können aufgelöst werden, indem die Vorzeichen sämtlicher Summanden in der Klammer gewechselt werden. Mehrfachklammern werden systematisch von innen nach aussen oder von aussen nach innen aufgelöst.

Erklärende Beispiele

(1) Summanden können grundsätzlich in beliebige Reihenfolge gebracht werden. Hier werden gleichartige Summanden zusammengeschrieben:

$$a - 4r + 6a + 12r = 3a + 6a + 12r - 4r$$

(2) Nur gleichartige Summanden dürfen addiert werden:

$$3a + 6a + 12r - 4r = 9a + 8r$$

Ein weiteres Beispiel:

$$a^2b + 2ab^2 - 2a^2b + 4ab^2 = 6ab^2 - a^2b$$

(3a) Zuerst die Klammern auflösen und dann gleichartige Summanden zusammenfassen:

$$\begin{aligned} &a - (2b - 5a + 2c) + (3b - 2a) - c \\ &= a - 2b + 5a - 2c + 3b - 2a - c \\ &= 4a + b - 3c \end{aligned}$$

(3b) Die Mehrfachklammern werden in diesem Beispiel von aussen nach innen aufgelöst:

$$\begin{aligned}
&b - 2a - ((2b - c) - (3c - a - (b - a))) \\
&= b - 2a - (2b - c) + (3c - a - (b - a)) \\
&= b - 2a - 2b + c + 3c - a - (b - a) \\
&= b - 2a - 2b + c + 3c - a - b + a \\
&= -2a - 3b + 4c
\end{aligned}$$

Übungen

1. Fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

a) $x + y + y + x + x + y + x$
b) $3a + 32 - 2a + 18$
c) $6x - 12y + 8y - 2y - 4x$
d) $e^3 + e^3 + e^2 + e^2 + e^2 + e$
e) $y^2z + xy + y^2z - xy + y^2z - yz^2 - yz^2$
f) $-x^2 + 15x - 12 - 3x^2 + 9x - 23x + 2x^2$
g) $\frac{5}{8}a^2 + \frac{1}{10}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{2}{5}b^2 + ab$
h) $-0.3x^2y + 0.7xy^2 + xy + 1.3x^2y - 0.9xy^2$

Aufgaben 2–5:
Schreiben Sie ohne Klammern und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

2. a) $-2a + (-8a)$ b) $3a^2 + (-9a^2)$ c) $-11b - (+9b)$
d) $b^3 - (+11b^3)$ e) $-30c - (-11c)$ f) $-\lambda a + (-5\lambda a)$

3. a) $-(m + n)$ b) $-(-k + 2k^2 - 3k^3)$ c) $x - (y + z)$
d) $x - (y - z)$ e) $x - (-y + z)$ f) $x - (-y - z)$

4. a) $4m + (2m + 5)$ b) $5m + (1 - 6m)$
c) $-6r - (4r - 8)$ d) $4p^2 - (-5p^2 + 3p)$
e) $e^3 - 4e - (2e^3 + e^2 - 4e)$ f) $5c^4 + 3c^2 + 5 - (c^4 - c^3 + c^2 - c + 5)$

5. a) $v - (w - (x - y))$ b) $v^2 + (w^2 - (x^2 + y^2))$
c) $20u - (10u - (5u - v))$ d) $20\delta - (10\delta + (5\delta - \varphi))$
e) $12a^3 - (6a - (10a^3 - 3a + 2) - 10a)$ f) $-(2x - (3x + 1) + 2x) - (b + 11)$

6. Vereinfachen Sie:

a) $v - (w - (x - (y - z)))$
b) $v^3 + (w^3 - (x^3 + (y^3 - z^3)))$
c) $2 - (4 - (8 - (16 + a)))$
d) $-(p + (-2p - (3p - 1))) - (4p - (5p))$
e) $((y^2 - 1) + (y + 2)) - ((y^2 - 1) + (y + 2))$
f) $-(2\delta + 8) + \delta + (2 - 3\delta - (10\delta - (1 - \delta) - 5) + \delta)$
g) $-(-(-a^2 - 3a + 12) - 2a - 6) + 3a^2 - a - (-2a - 3 + (1 - 5a^2))$
h) $3z^2 + (2z - 1 + (4z + 1 - ((3z)^2 - 1) + z^2) + 1 - z) + 1$

3.2 Multiplikation

Multiplikation algebraischer Terme

(1) Das Multiplikationszeichen wird in der Algebra oft weggelassen. Es gilt dementsprechend $ab = a \cdot b$.

(2) Die Reihenfolge der Faktoren spielt bei der Multipülikation keine Rolle. Es gilt das Kommutativgesetz: $ab = ba$.

(3) Das Distributivgesetz der Multiplikation besagt, dass ein Faktor vor der Klammer mit allen Summanden in der Klammer multipliziert werden muss: $a(b + c) = ab + ac$.

(4) Aus dem Distributivgesetz ergeben sich die drei binomschen Formeln:
1. binomsche Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomsche Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomsche Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Erklärende Beispiele

(1) Das Multiplikationszeichen wird für eine einfachere Schreibweise oft weggelassen:

$$3ab^2 = 3 \cdot a \cdot b \cdot b$$

(2) Bei drei Faktoren sind grundsätzlich sechs Schreibweisen möglich:

$$3ab = 3ba = a3b = ab3 = b3a = ba3$$

(3a) Eine einfache Anwendung des Distributivgesetzes:

$$-a^2b(-c + ba - a) = -a^2b \cdot (-c) - a^2b \cdot (+ba) - a^2b \cdot (-a) = a^2bc - a^3b^2 + a^3b$$

Bemerkung: Werden zwei negative Faktoren miteinander multipliziert, entsteht ein positives Produkt.

(3b) Nochmals eine Anwendung des Distributivgesetzes:

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

(4a) Herleitung der 1. binomschen Formel mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(4b) Herleitung der 2. binomschen Formel mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(4c) Herleitung der 3. binomschen Formel mit Hilfe des Distributivgesetzes:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Übungen

11. Verwandeln Sie in eine möglichst einfache Summe:

a) $2(2a+a)+3(3a+b)$
b) $3(3a+b)-2(3a+b)$
c) $4c(c-7)-3c(c-8)$
d) $9d(d^2-2)-3(3d^3+6d-2)$
e) $x-5xz-5z^2-6z(x-z+3)$
f) $x(y-z)-y(x-z)-z(y-x)$

12. Multiplizieren Sie aus:

a) $(p+q)(r+s)$
b) $(a+b)(c-d)$
c) $(2v-2w)(10v-w)$
d) $(a-b)(c+d)$
e) $(-a-b)(c+d)$
f) $(a-b)(-c-d)$

13. Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie:

a) $(3x-7)(x-12)$
b) $(6y-2z)(5y-3z)$
c) $(u-3)(-u-11)$
d) $(-p+2q)(-p+9q)$
e) $(m^4-m)(m^3-m)$
f) $(n^2-3)(2n^2-3)$

14. Schaffen Sie die Klammern weg und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $(6a^2+3b)(2a-4b^2)$
b) $(6e^2+3f)(2e-4f^2)$
c) $(a+b)(c+d+e)$
d) $(a+b)(c-d-e)$
e) $(2r-s)(s-t-1)$
f) $(u-v+w)(-3w+1)$
g) $(2x-y)(x+2y-z)$
h) $(x^3-y^2)(x-y^2-1)$

15. Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie:

a) $(a+2b-c)(a-6b+c)$
b) $(-a^2+3a+1)(a^2-a+2)$
c) $(x-2y-3)(2x+3y-2)$
d) $(4x^3-3x^2+2x-1)(x^2+2x+3)$
e) $(c-d)(c^4+c^3d+c^2d^2+cd^3-d^4)$
f) $4(r+s)(t-u)$

16. Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie:

a) $-2(-r+5)(r-s)$
b) $-3y(y+1)(y-2)$
c) $2y^2(y+5)(y-4)$
d) $(a+b)(c+d)(e+f)$
e) $(f-1)(f-2)(f-3)$
f) $(-a+2)(-b+3)(c-4)$

19. Schreiben Sie mithilfe der binomischen Formeln ohne Klammern und fassen Sie zusammen:

a) $(a+b)^2$ b) $(c+4)^2$ c) $(2d+3e)^2$
d) $(f-g)^2$ e) $(z-3)^2$ f) $(3v-4w)^2$
g) $(x+y)(x-y)$ h) $(u+2)(u-2)$ i) $(g^2+h)(g^2-h)$

20. Schreiben Sie mithilfe der binomischen Formeln ohne Klammern und fassen Sie zusammen:

a) $(4m+5n)(4m-5n)$ b) $(p^3+q^3)^2$ c) $(y^2+1)(y^2-1)$
d) $(h-(-k))^2$ e) $(-r^2-r)^2$ f) $\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)^2$
g) $(x^3-0.1w^3)^2$ h) $\left(\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\right)$ i) $(-3z^2-1)(3z^2-1)$

21. Verwandeln Sie mithilfe der binomischen Formeln in eine möglichst einfache Summe:

a) $4x(x+3)^2$ b) $a(a-5)^2$ c) $-2c(c-5)^2$
d) $-10x^2(x^2+1)^2$ e) $(g+2h)^2(g-h)$ f) $(\vartheta+1)^2(\vartheta+3)$
g) $(q-1)(-q+3)^2$ h) $(p^2+1)(p^2-2p)^2$ i) $(k+1)(k-1)(k^2+2)$

22. Verwandeln Sie in eine möglichst einfache Summe:

a) $(2x+3)(x+1)(2x-3)$ b) $(4a^2+25b^2)(2a+5b)(2a-5b)$
c) $(a+1)(b^2+2)(a-1)(b^2-2)$ d) $(3u^4-1)^2(3u^4+1)^2$

3.3 Faktorisieren

Wenn man aus einer Summe ein Produkt machen möchte, muss man faktorisieren (=ausklammern). Zwei wichtige Verfahren werden genauer betrachtet.

Faktorisieren

(1) In allen Summanden vorkommende, gemeinsame Faktoren ausklammern.

(2) Binomsche Formeln verwenden.

Erklärende Beispiele

(1) Zuerst wird jeder Summand als Produkt geschrieben, wobei ein Faktor der grösste gemeinsamen Teiler (ggT) der drei Summanden ist, hier $2b^2c$.

$$2ab^2c^2 + 4b^3c^2 - 8ab^2c = 2b^2c \cdot ac + 2b^2c \cdot 2bc + 2b^2c \cdot 4a$$

Danach wird jeder Summand durch den ggT dividiert. Diese Division wird kompensiert, indem die neue Summe wieder mit dem ggT multipliziert wird:

$$2b^2c \cdot \left(\frac{2b^2c^2 \cdot ac}{2b^2c} + \frac{2b^2c \cdot 2bc}{2b^2c} + \frac{2b^2c \cdot 4a}{2b^2c} \right)$$

Das Kürzen der Brüche führt schliesslich zur faktorisierten Summe:

$$2b^2c \cdot (ac + 2bc + 4a)$$

Bemerkung:

- Die ersten beiden Schritte dürfen auch übersprungen werden. Sie sollen lediglich aufzeigen, dass hinter dem Faktorisieren eine Division, resp. eine Multiplikation stehen.
- Faktorisieren macht nur Sinn für einen $ggT \neq 1$.

(2a) Bei der unterstehenden Differenz gibt es keinen gemeinsamen Faktor, der ausgeklammert werden kann; der ggT ist 1:

$$c^2 - d^2$$

Immer dann ist zu prüfen, ob die binomschen Formeln weiterhelfen könnten. Wendet man die 3. binomsche Formel von rechts nach links an, kann man die Differenz wie folgt faktorisieren:

$$c^2 - d^2 = (c + d)(c - d)$$

(2b) Auch bei dieser Summe ist der ggT 1:

$$c^2 + 2cd + d^2$$

Hier ist die 1. binomsche Formel von rechts nach links anzuwenden:

$$c^2 + 2cd + d^2 = (c + d)^2 = (c + d)(c + d)$$

(2c) Grundsätzlich müssen für die Anwendung einer der drei binomschen Formel immer zwei Quadratterme vorliegen. Im folgenden Beispiel sind dies $9c^2$ und $4d^2$:

$$9c^2 - 12cd + 4d^2$$

Die 2. binomsche Formel von rechts nach links bringt:

$$9c^2 - 12cd + 4d^2 = (3c - 2d)^2 = (3c - 2d)(3c - 2d)$$

(2d) Es kann auch sein, dass zuerst ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden muss, bevor man eine der binomschen Formel anwenden kann:

$$32ac^2 + 48acd + 18ad^2$$

Faktorisieren des gemeinsamen Faktors $2a$:

$$2a(16c^2 + 24cd + 9d^2)$$

Nun kann die 1. binomsche Formel von rechts nach links angewendet werden:

$$2a(16c^2 + 24cd + 9d^2) = 2a(4c + 3d)^2 = 2a(4c + 3d)(4c + 3d)$$

Übungen

37. Klammern Sie aus:

a) $4x+4y$ b) a^3-a^2 c) $25z^{10}+5z^9$ d) $45abc+18ac$

38. Verwandeln Sie in ein Produkt:

a) $16ax-12ay-8az$ b) $49s+35t-28u$
c) v^5-v^3+vw d) $2\lambda^5-4\lambda^3+8\lambda$
e) $-p^3q^2+p^5q^2-p^3q^2r+2p^3q^2$ f) $33x^2y^2z+66x^2yz^2+99xy^2z^2$

39. Klammern Sie -1 aus:

a) $a-5$ b) $-4x-y$ c) $2b+1$
d) $-2g+1$ e) $-7h-i-10k$ f) $3\mu^3-2\mu^2-\mu$
g) $-a_1+a_2-a_3$ h) $-w-x+y-z$ i) $2p-q-(u+1)$

40. Klammern Sie so aus, dass in den Klammern keine Brüche mehr stehen:

a) $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$ b) $\frac{1}{4}c-\frac{2}{8}d+e-1$ c) $0.1g-1.12h+2$

45. Verwandeln Sie mithilfe der dritten binomischen Formel in ein Produkt:

a) $c^2 - d^2$ b) $4x^2 - 36y^2$ c) $25a^2 - 1$ d) $1 - e^{10}$
e) $-9s^2 + 49t^2$ f) $6x^4y^2 - 6z^4$ g) $5b^4 - 3$ h) $27\phi^4 - 3$

46. Verwandeln Sie mithilfe der ersten und zweiten binomischen Formel in ein Produkt:

a) $p^2 + 2pq + q^2$ b) $x^2 - 3xy + y^2$
c) $4e^2 - 4e + 1$ d) $\lambda^4\gamma^2 + 2\lambda^2\gamma + 1$
e) $25a^6 - 20a^3b + 4b^2$ f) $2m^4 - 16m^2 + 32$
g) $-24x^2 - 24x - 6$ h) $-r^4 + 2r^3s - r^2s^2$

47. Verwandeln Sie mithilfe der dritten binomischen Formel in ein Produkt:

a) $16a^2 - (3a-5)^2$ b) $(e+f)^2 - (e+f+g)^2$
c) $1 - v^2 - 2vw - w^2$ d) $c^2 - 4a^2 - 8ab - 4b^2$
e) $p^2 + 2p + 1 - 100q^2$ f) $4m^4 - 4n^2 + 40n - 100$

3.4 Division

3.4.1 Der Bruch

De Bruch

(1) Ein Bruch besteht aus seinem Zähler und seinem Nenner: $\frac{Zaehler}{Nenner}$.

(2) Bezüglich einem negativen Vorzeichen gilt: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

(3) Die Division durch Null ist nicht definiert: Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist nur für $b \neq 0$ bestimmt.

(4) Ein Bruch kann nur Null sein, wenn sein Zähler Null ist: $\frac{a}{b} = 0$ wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ sind.

(5) Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch einen gemeinsamen Faktor dividiert werden. Der Wert des Bruches verändert sich dabei nicht.

(6) Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit demselben Faktor multipliziert werden. Der Wert des Bruches verändert sich dabei nicht.

Erklärende Beispiele

(2) Zwei negative Vorzeichen heben sich auf:

$$-\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

(4) Ist der Zähler Null, wird der Bruch unabhängig vom Nenner ebenfalls Null (vorausgesetzt, der Nenner ist nicht Null):

$$\frac{0}{-a^3b^4 + 2c^2} = 0$$

(5a) Der gemeinsame Faktor ist im folgenden Beispiel $2ac^2$:

$$\frac{8a^2c^2}{2ac^4} = \frac{2ac^2 \cdot 4a}{2ac^2 \cdot c^2}$$

Nun können Zähler und Nenner durch $2ac^2$ dividiert werden und man kommt zum gekürzten Bruch:

$$\frac{\frac{2ac^2\cdot 4a}{2ac^2}}{\frac{2ac^2\cdot c^2}{2ac^2}} = \frac{4a}{c^2}$$

Bemerkung: Der letzte Schritt kann auch übersprungen werden. Er soll lediglich aufzeigen, dass hinter dem Kürzen eine Division steckt.

(5b) Liegt im Zähler und / oder im Nenner eine Summe vor, muss in einem ersten Schritt je ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden. Hier ist der gemeinsame Faktor $4ab$:

$$\frac{8a^2b - 4ab^2}{4a^2b - 4ab^2} = \frac{4ab \cdot (2a - b)}{4ab \cdot (a - b)}$$

Nun können Zähler und Nenner durch $4ab$ dividiert werden und man kommt zum gekürzten Bruch:

$$\frac{2a - b}{a - b}$$

(5c) Es kann auch sein, dass eine Summe im Zähler oder im Nenner mit Hilfe einer binomschen Formel faktorisiert werden muss:

$$\frac{8a^2 - 18b^2}{4ac + 6bc} = \frac{2 \cdot (4a^2 - 9b^2)}{2c \cdot (2a + 3b)} = \frac{2 \cdot (2a + 3b)(2a - 3b)}{2 \cdot c \cdot (2a + 3b)}$$

Sind Zähler und Nenner vollständig faktorisiert, können beide durch ihre gemeinsamen Faktoren, hier 2 und $(2a + 3b)$, dividiert werden:

$$\frac{2 \cdot (2a + 3b)(2a - 3b)}{2 \cdot c \cdot (2a + 3b)} = \frac{2a - 3b}{c}$$

(6a) Hier wird der Bruch $\frac{b}{c+1}$ mit $3ab$ erweitert. Das heisst, dass sowohl Zähler als auch Nenner mit dem Faktor $3ab$ multipliziert werden:

$$\frac{b \cdot 3ab}{(c + 1) \cdot 3ab} = \frac{3ab^2}{3abc + 3ab}$$

(6b) Es ist auch möglich, einen Bruch mit einer Summe zu erweitern. Der Bruch $\frac{c^2}{b+c}$ wird folgend mit $(2a + b)$ erweitert. Das heisst auch hier, dass sowohl Zähler als auch Nenner mit dem Faktor $(2a + b)$ multipliziert werden:

$$\frac{c^2 \cdot (2a + b)}{(b + c) \cdot (2a + b)} = \frac{2ac^2 + bc^2}{2ab + b^2 + 2ac + bc}$$

Übungen

5. Kürzen Sie so weit wie möglich:

a) $\frac{18}{12g}$ b) $\frac{-15abc}{35bcd}$ c) $-\frac{-48x^5y^4}{-36x^2y}$ d) $\frac{-42m^6n^2}{-35m^5n^3}$

6. Kürzen Sie mithilfe von Ausklammern:

a) $\frac{4c-24}{4}$ b) $\frac{15d^2+25d}{5d}$ c) $\frac{-81x^4y^2}{9x^3y^2-45x^3y^2}$

d) $\frac{8k-16}{8k+36}$ e) $\frac{ax+bx}{ay+by}$ f) $\frac{2v^4-2v^3}{v^3-v^2}$

7. Kürzen Sie mithilfe der binomischen Formeln:

a) $\frac{5x-5y}{x^2-y^2}$ b) $\frac{c^4-c^2}{c^2+c}$ c) $\frac{m^2+2mn+n^2}{5m+5n}$

d) $\frac{12e^2-12e+3}{8e-4}$ e) $\frac{p^3-2p^2+p}{pq-q}$ f) $\frac{4z^2-25}{8z^2+40z+50}$

10. Kürzen Sie, indem Sie -1 ausklammern:

a) $\frac{2x-y}{y-2x}$ b) $\frac{uw-uv}{v-w}$ c) $\frac{a^3-a^2}{1-a^2}$

d) $\frac{32-4k}{k^2-3k-40}$ e) $\frac{g^2-g-20}{-g^2-g+30}$ f) $\frac{-4\delta^2+4\delta\epsilon-\epsilon^2}{8\delta^2-2\epsilon^2}$

13. Erweitern Sie mit -1:

a) $\frac{1-k}{-k-2}$ b) $\frac{-a}{2c+d}$ c) $\frac{-x-y+8}{-8xy}$

d) $\frac{-4\cdot(m-7)}{-n}$ e) $\frac{(r-s)\cdot(-r-2s)}{t}$ f) $\frac{e^2-5ef+f^2}{f^2-3ef+e^2}$

14. Erweitern Sie den Bruch $\frac{1}{x}$ auf die folgenden Nenner:

a) x^3 b) $4x^2z$ c) $2ax+bx$

15. Erweitern Sie den Bruch $\frac{2}{c-d}$ auf die folgenden Nenner:

a) $3c-3d$ b) $c^2-2cd+d^2$ c) $d-c$

16. Erweitern Sie den Bruch $\frac{a+b}{a-b}$ auf die folgenden Nenner:

a) $4a^2-4b^2$ b) b^2-a^2 c) $a^2+2ab-3b^2$

3.4.2 Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche werden nach folgendem Schema addiert, bzw. subtrahiert.

Addition und Subtraktion von Brüchen

(1) Alle Zähler und Nenner faktorisieren.

(2) Einzelbrüche kürzen.

(3) Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner bestimmen und Einzelbrüche auf das kgV erweitern.

(4) Brüche mit einem einzigen Bruchstrich schreiben.

(5) Im Zähler Klammern auflösen, addieren und vereinfachen.

(6) Zähler faktorisieren.

(7) Bruch kürzen.

Erklärende Beispiele

Untenstehende Aufgabe wird schrittweise nach obigem Schema gelöst:

$$\frac{2a}{2a+2} - \frac{2a+1}{a-1} + \frac{3a^2+15a}{3a^2-3}$$

(1) Alle Zähler und Nenner faktorisieren:

$$\frac{2a}{2(a+1)} - \frac{2a+1}{a-1} + \frac{3a(a+5)}{3(a+1)(a-1)}$$

(2) Einzelbrüche kürzen:

$$\frac{a}{a+1} - \frac{2a+1}{a-1} + \frac{a(a+5)}{(a+1)(a-1)}$$

(3) Das kgV der der Nenner bestimmen: Da die Nenner bereits faktorisiert sind, liegen sie bereits als Produkt vor: $(a+1)\cdot 1$, $(a-1)\cdot 1$ und $(a+1)\cdot(a-1)$. Das kgV ist so schnell gefunden: $kgV = (a+1)(a-1)$. In einem nächsten Schritt werden die Einzelbrüche auf das kgV erweitert.

$$\frac{a\cdot(a-1)}{(a+1)\cdot(a-1)} - \frac{(2a+1)\cdot(a+1)}{(a-1)\cdot(a+1)} + \frac{a(a+5)}{(a+1)(a-1)}$$

(4) Nun können die Einzelbrüche auf einen Bruchstrich gebracht werden:

$$\frac{a(a-1)-(2a+1)(a+1)+a(a+5)}{(a+1)(a-1)}$$

(5) Achten Sie beim Auflösen der Klammern auf negative Vorzeichen:

$$\frac{a^2-a-2a^2-2a-a-1+a^2+5a}{(a+1)(a-1)}$$
$$=\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}$$

(6) Der Zähler kann hier nicht weiter faktorisiert werden:

$$\frac{(a-1)}{(a+1)(a-1)}$$

(7) Im letzten Schritt wird gekürzt:

$$\frac{1}{a+1}$$

Eine weitere Aufgabe:

$$\frac{1}{a^2-1}-\frac{2}{2-2a}$$

(1) Alle Zähler und Nenner faktorisieren:

$$\frac{1}{(a+1)(a-1)}-\frac{2}{2(1-a)}$$

(2) Einzelbrüche kürzen:

$$\frac{1}{(a+1)(a-1)}-\frac{1}{(1-a)}$$

(3) Das kgV der Nenner bestimmen: Hier sieht der zweite Nenner ähnlich aus wie ein Faktor des ersten Nenners. Faktorisiert man (-1) im zweiten Nenner erhält man:

$$\frac{1}{(a+1)(a-1)}-\frac{1}{(-1)(a-1)}$$

Da sich die beiden Minuszeichen im zweiten Bruch aufheben, folgt:

$$\frac{1}{(a+1)(a-1)}+\frac{1}{(a-1)}$$

Das kgV lautete so, sehr kurz: $(a+1)(a-1)$. Als nächstes werden die Einzelbrüche auf das kgV erweitert:

$$\frac{1}{(a+1)(a-1)} + \frac{a+1}{(a-1)(a+1)}$$

(4) Nun können die Einzelbrüche auf einen Bruchstrich gebracht werden:

$$\frac{1+a+1}{(a+1)(a-1)}$$

(5) Im Zähler Klammern auflösen, addieren und vereinfachen:

$$\frac{2+a}{(a+1)(a-1)}$$

(6) Der Zähler kann hier nicht weiter faktorisiert werden.
(7) Auch Kürzen ist nicht möglich:

$$\frac{(2a+1)}{(a+1)(a-1)}$$

Eine weitere Aufgabe zum kgV: Bestimmen Sie das kgV der folgenden drei Nenner.

- $Nenner_1 = 12$
- $Nenner_2 = 75$
- $Nenner_3 = 70$

Das kgV der drei Nennern ist das Produkt der höchsten Potenzen aller Primfaktoren, die in mindestens einem der drei Nennern vorkommt.
Die Zahlen müssen also zuerst in ihre Primfaktoren zerlegt werden:

- $Nenner_1 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$
- $Nenner_2 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$
- $Nenner_3 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

Das Produkt der höchsten Potenzen aller Primfaktoren ist nun:

$$kgV = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$$

Die obigen Überlegungen können analog auch für Nenner bestehend aus algebraischen Termen angestellt werden. Hier soll das kgV der drei Nenner bestimmt werden. Die Nenner sind bereits faktorisiert:

- $Nenner_1 = 3ab^3(a-b)(a+b)^2$
- $Nenner_2 = 9a^2b(a-b)^3 = 3^2 \cdot a^2b(a-b)^3$
- $Nenner_3 = 12c(a-b)(a+b) = 2^2 \cdot 3 \cdot c(a-b)(a+b)$

Das Produkt der höchsten Potenzen aller (Prim-)Faktoren ist nun:

$$kgV = 2^2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c \cdot (a-b)^3 \cdot (a+b)^2 = 36a^2b^3c(a-b)^3(a+b)^2$$

Übungen

19. Machen Sie die Brüche gleichnamig:

a) $\frac{1}{2x}; \frac{2}{y}; \frac{3}{z}$

b) $\frac{c}{3cd^2}; \frac{d}{12c^3d}$

c) $\frac{e}{e^2-4}; \frac{d}{12c^3d}$

d) $\frac{g}{3-\mu}; \frac{3}{\mu-3}$

e) $\frac{1}{x^4-4y^2}; \frac{x}{2y-x^2}$

f) $\frac{10}{2a+2b}; \frac{20}{3a+3b}; \frac{30}{5a+5b}$

20. Schreiben Sie auf einen Bruchstrich und vereinfachen Sie falls möglich:

a) $\frac{10x}{5}+\frac{11x}{5}$

b) $\frac{12}{4y}-\frac{7}{4y}$

c) $\frac{13z}{8}-\frac{-z}{8}$

d) $\frac{5}{2a}-\frac{3}{2a}+\frac{-7}{2a}$

e) $\frac{b+2c}{b}+\frac{b-2c}{b}$

f) $\frac{\lambda}{\lambda-3}-\frac{3}{\lambda-3}$

g) $\frac{4m-3}{2}-\frac{7m-9}{2}$

h) $\frac{r-t}{r^2}+\frac{t-2r}{r^2}$

i) $-\frac{p^2+p}{gh}-\frac{-p^2-p}{gh}$

21. Schreiben Sie auf einen Bruchstrich und vereinfachen Sie:

a) $\frac{10x}{2}+\frac{11x}{12}$

b) $\frac{4y}{5}+\frac{9y}{11}$

c) $\frac{-z}{24}+\frac{21z}{64}$

d) $\frac{6a}{5c}+\frac{11a}{15c}$

e) $\frac{12}{4ef}-\frac{7}{4fg}$

f) $\frac{13p}{q^2}-\frac{-p}{2q}$

22. Schreiben Sie auf einen Bruchstrich und vereinfachen Sie:

a) $3+\frac{k}{4}$

b) $6\vartheta-\frac{5}{3\beta}$

c) $\frac{4}{w}-2+3w$

d) $11+\frac{2b-3}{7}$

e) $6c-\frac{3c+d}{8}$

f) $m+2-\frac{3m-m^2}{m}$

23. Addieren und subtrahieren Sie die folgenden Brüche:

a) $\frac{v^2}{v-1}+\frac{2v}{4}$

b) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y-z}$

c) $\frac{5}{r-s}-\frac{4}{r+s}$

d) $\frac{a}{a+2}+\frac{a+1}{a-3}$

e) $\frac{b-4}{b^2+1}-\frac{b+10}{b^2-5}$

f) $\frac{d-2}{24d-12e}+\frac{5-3d}{36d-18e}$

g) $\frac{2e-f}{12e^2+16ef}-\frac{1.5}{9e+12f}$

h) $u-\frac{u^3-6}{u^2-6}$

3.4.3 Multiplikation und Division von Brüchen

Multiplikation und Division von Brüchen

(1) Zwei Brüche werden multipliziert, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert werden:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(2) Zwei Brüche werden dividiert, indem der erste Bruch (Dividend) mit dem Kehrwert des zweiten Bruches (Divisor) multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Erklärende Beispiele

(1a) Damit die Rechenvorschrift für die Multiplikation angewandt werden kann, kann im folgenden Beispiel der der Term a^2 auch als Bruch $\frac{a^2}{1}$ dargestellt werden:

$$a^2 \cdot \frac{3}{a^3b^2} = \frac{a^2}{1} \cdot \frac{3}{a^3b^2} = \frac{3a^2}{a^3b^2} = \frac{3}{ab^2}$$

(1b) Das Anwenden der Rechenvorschrift für die Multiplikation führt in diesem Beispiel zu:

$$\frac{-ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{-a-b}{-b^2} = \frac{(-ab)\cdot(-a-b)}{(a^2-b^2)\cdot(-b^2)}$$

Das Ausmultiplizieren von Summen oder Differenzen ist häufig nicht zielführend. Es enstehen monströse Summen, die nicht gekürzt werden können. Meisten ist Faktorisieren und Kürzen erfolgreicher:

$$\frac{(-ab)\cdot(-a-b)}{(a^2-b^2)\cdot(-b^2)} = \frac{(-1)\cdot ab\cdot(-1)\cdot(a+b)}{(a+b)(a-b)\cdot(-1)\cdot b^2} = -\frac{a}{b(a-b)}$$

(2a) Damit die Rechenvorschrift für die Division angewandt werden kann, kann im folgenden Beispiel der der Term ab^2 auch als Bruch $\frac{ab^2}{1}$ dargestellt werden:

$$ab^2 : \frac{4ab}{a^2} = \frac{ab^2}{1} : \frac{4ab}{a^2} = \frac{ab^2}{1} \cdot \frac{a^2}{4ab} = \frac{a^3b^2}{4ab} = \frac{a^2b}{4}$$

(2b) Das Anwenden der Rechenvorschrift für die Division führt in diesem Beispiel zu:

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} : \frac{-b+a}{ab^2+b^3} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{ab^2+b^3}{-b+a} = \frac{(a^2-2ab+b^2)\cdot(ab^2+b^3)}{(a^2-b^2)\cdot(-b+a)}$$

Auch hier ist das Ausmultiplizieren nicht zielführend. Stattdessen führt Faktorisieren und Kürzen zum Resultat:

$$\frac{(a^2-2ab+b^2)\cdot(ab^2+b^3)}{(a^2-b^2)\cdot(-b+a)}=\frac{(a-b)(a-b)\cdot b^2\cdot(a+b)}{(a+b)(a-b)\cdot(-1)\cdot(a-b)}=\frac{b^2}{-1}=-b^2$$

Übungen

29. Vereinfachen Sie:

a) $\frac{5a-b}{a+b}\cdot(2a+2b)$ b) $(4p-4q)\cdot\frac{1}{p-q}$

c) $\frac{3x^2-3z^2}{y^3}:(x^3y^2z-xy^2z^3)$ d) $\frac{2u}{11-u}\cdot(u-11)$

e) $\frac{ef}{3f-3e}\cdot(12e-12f)$ f) $(33d-33d^2)\cdot\frac{-1}{11d^2-11d}$

30. Schreiben Sie mit einem Bruchstrich und vereinfachen Sie:

a) $\frac{y}{-z}:x$ b) $\left(-\frac{x}{y}\right):-z$ c) $-y:\frac{-z}{x}$

d) $a^2:\frac{2}{a}$ e) $\frac{64e^8}{5f^3g}:80e^6g^3$ f) $-51\varphi^2\delta^2:\frac{-34\varphi^2}{3\delta}$

g) $\frac{21v-14}{w}:(-7)$ h) $\frac{36xy^2-48xy}{-11}:24x^3y$ i) $\frac{3b^2-3bc}{c}:(6b-6c)$

31. Vereinfachen Sie:

a) $\frac{2ux^2-x^2w}{y}:(4uv-2vw)$ b) $(-10r-10s):\frac{r+s}{-3}$

c) $(4p-12):\frac{9-3p}{q-1}$ d) $(cde-2):\frac{4c^3d^2e-8c^2d}{-8}$

33. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $\frac{-a}{b}\cdot\frac{b}{-a}$ b) $\frac{-4k}{3m}\cdot\frac{-9m}{-2k}$ c) $\frac{-65c^3}{20d^2}\cdot\frac{4d^4}{13c^2}$

d) $\frac{-64x^2y}{7z}\cdot\frac{49z^2}{-72xy^3}$ e) $\frac{mno}{p^2q}\cdot\frac{mno}{p^2q}$ f) $\frac{\delta^5}{-4}\cdot\frac{\delta^5}{-4}$

34. Vereinfachen Sie:

a) $\frac{-g}{h}:\frac{-h}{-g}$ b) $\frac{-8c}{27d}:\frac{9d}{-16c}$

c) $\frac{112v^2w}{-17xy}:\frac{8vw}{17xy^2}$ d) $\frac{-1}{81\epsilon^4\phi^3}:\frac{1}{-56\epsilon^2\phi^2}$

40. Schaffen Sie die Doppelbrüche weg und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

a) $\dfrac{\frac{v}{w}}{\frac{x}{y}}$ b) $\dfrac{-v}{\frac{x}{y}}$ c) $\dfrac{\frac{v}{w}}{-x}$ d) $\dfrac{-\frac{v}{w}}{-\frac{x}{y}}$

e) $\dfrac{\frac{4n}{3m}}{\frac{2n}{12m}}$ f) $\dfrac{\frac{-5x^3}{-6y^2}}{-\frac{4x^2}{3y^4}}$ g) $\dfrac{\frac{a^3b^2c}{c^2d}}{\frac{ab^2c^3}{2d}}$ h) $\dfrac{35\alpha^2\beta^2}{-\frac{1}{28\beta\gamma^2}}$

41. Vereinfachen Sie die Doppelbrüche so weit wie möglich:

a) $\dfrac{p+\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}}$ b) $\dfrac{3+\frac{3}{q}}{3-\frac{3}{q^2}}$ c) $\dfrac{1}{\frac{1}{f}+\frac{1}{g}}$ d) $\dfrac{\frac{1}{z}-z^3}{z-\frac{1}{z^3}}$

4 Lösungen

4.1 Lösungen zum Orientierungstest

Addition und Subtraktion

1) $3a^2b - 4ab^2 - 3ab$

Multiplikation

2) $a^2 - a^2b + ab^3 - b^4$
3) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

Faktorisieren

4) $-2a^2b(abc - 5c + 3b)$
5) $3(a-1)(a+1)$
6) $-6(2a+1)^2$

Der Bruch

7) $\frac{a^2-a}{b}$

Addition und Subtraktion von Brüchen

8) 0
9) $\frac{-b}{12a^2+16ab}$

Multiplikation Division von Brüchen

10) $\frac{3}{ab^5c}$
11) $\frac{a}{a-1}$

4.2 Lösungen zur Addition und Subtraktion

Lösungen zu Übungen 6

1.	a) $4x+3y$	b) $a+50$	c) $2x-6y$	d) $2e^3+3e^2+e$
	e) $3y^2z-2yz^2$	f) $-2x^2+x-12$	g) $\frac{7}{8}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$	h) $x^2y+xy-0.2xy^2$
2.	a) $-10a$	b) $-6a^2$	c) $-20b$	d) $-10b^3$
	e) $-19c$	f) $-6a\lambda$		
3.	a) $-m-n$	b) $3k^3-2k^2+k$	c) $x-y-z$	d) $x-y+z$
	e) $x+y-z$	f) $x+y+z$		
4.	a) $6m+5$	b) $-m+1$	c) $-10r+8$	d) $9p^2-3p$
	e) $-e^3-e^2$	f) $4c^4+c^3+2c^2+c$		
5.	a) $v-w+x-y$	b) $v^2+w^2-x^2-y^2$	c) $15u-v$	d) $5\delta+\varphi$
	e) $22a^3+a+2$	f) $-b-x-10$		
6.	a) $v-w+x-y+z$	b) $v^3+w^3-x^3-y^3+z^3$	c) $-a-10$	d) $5p-1$
	e) 0	f) -14δ	g) $7a^2+20$	h) $-5z^2+5z+3$

4.3 Lösungen zur Multiplikation

11. a) $15a + 3b$ b) $3a + b$ c) $c^2 - 4c$ d) $-36d + 6$
e) $x - 11xz + z^2 - 18z$ f) 0

12. a) $pr + ps + qr + qs$ b) $ac - ad + bc - bd$ c) $20v^2 - 22vw + 2w^2$ d) $ac + ad - bc - bd$
e) $-ac - ad - bc - bd$ f) $-ac - ad + bc + bd$

13. a) $3x^2 - 43x + 84$ b) $30y^2 - 28yz + 6z^2$ c) $-u^2 - 8u + 33$ d) $p^2 - 11pq + 18q^2$
e) $m^7 - m^5 - m^4 + m^2$ f) $2n^4 - 9n^2 + 9$

14. a) $12a^3 - 24a^2b^2 + 6ab - 12b^3$ b) $12e^3 + 6ef - 24e^2f^2 - 12f^3$
c) $ac + ad + ae + bc + bd + be$ d) $ac - ad - ae + bc - bd - be$
e) $-2r + 2rs - 2rt - s^2 + s + st$ f) $u - 3uw - v + 3vw - 3w^2 + w$
g) $2x^2 + 3xy - 2xz - 2y^2 + yz$ h) $x^4 - x^3 - x^3y^2 - xy^2 + y^4 + y^2$

15. a) $a^2 - 4ab - 12b^2 + 8bc - c^2$ b) $-a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 5a + 2$
c) $2x^2 - 8x - xy - 6y^2 - 5y + 6$ d) $4x^5 + 5x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 4x - 3$
e) $c^5 - 2cd^4 + d^5$ f) $4rt - 4ru + 4st - 4su$

16. a) $2r^2 - 10r - 2rs + 10s$ b) $-3y^3 + 3y^2 + 6y$ c) $2y^4 + 2y^3 - 40y^2$
d) $ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$ e) $f^3 - 6f^2 + 11f - 6$
f) $12a - 4ab + abc - 3ac + 8b - 2bc + 6c - 24$

19. a) $a^2 + 2ab + b^2$ b) $c^2 + 8c + 16$ c) $4d^2 + 12de + 9e^2$ d) $f^2 - 2fg + g^2$
e) $z^2 - 6z + 9$ f) $9v^2 - 24vw + 16w^2$ g) $x^2 - y^2$ h) $u^2 - 4$
i) $g^4 - h^2$

20. a) $16m^2 - 25n^2$ b) $p^6 + 2p^3q^3 + q^6$ c) $y^4 - 1$ d) $h^2 + 2hk + k^2$
e) $r^4 + 2r^3 + r^2$ f) $4\mu^2 + 2\mu + \frac{1}{4}$ g) $x^6 - 0.2w^3x^3 + 0.01w^6$ h) $\frac{y^4}{16} - \frac{1}{4}$
i) $-9z^4 + 1$

21. a) $4x^3 + 24x^2 + 36x$ b) $a^3 - 10a^2 + 25a$ c) $-2c^3 + 20c^2 - 50c$
d) $-10x^6 - 20x^4 - 10x^2$ e) $g^3 + 3g^2h - 4h^3$ f) $\vartheta^3 + 5\vartheta^2 + 7\vartheta + 3$
g) $q^3 - 7q^2 + 15q - 9$ h) $p^6 - 4p^5 + 5p^4 - 4p^3 + 4p^2$ i) $k^4 + k^2 - 2$

22. a) $4x^3 + 4x^2 - 9x - 9$ b) $16a^4 - 625b^4$
c) $a^2b^4 - 4a^2 - b^4 + 4$ d) $81u^{16} - 18u^8 + 1$

4.4 Lösungen zum Faktorisieren

37. a) $4(x+y)$ b) $a^2(a-1)$ c) $5z^9(5z+1)$ d) $9ac(5b+2)$

38. a) $4a(4x-3y-2z)$ b) $7(7s+5t-4u)$ c) $v(v^4-v^2+w)$ d) $2\lambda(\lambda^4-2\lambda^2+4)$
e) $p^3q^2(-r+p^2+1)$ f) $33xyz(xy+2xz+3yz)$

39. a) $-1(-a+5)$ b) $-1(4x+y)$ c) $-1(-2b-1)$
d) $-1(2g-1)$ e) $-1(7h+i+10k)$ f) $-1(-3\mu^3+2\mu^2+\mu)$
g) $-1(a_1-a_2+a_3)$ h) $-1(w+x-y+z)$ i) $-1(-2p+q+u+1)$

40. a) $\frac{1}{3}(a+2b)$ b) $\frac{1}{4}(c-d+4e-4)$ c) $\frac{1}{50}(5g-56h+100)$

45. a) $(c+d)(c-d)$ b) $4(x+3y)(x-3y)$
c) $(5a+1)(5a-1)$ d) $(1+e^5)(1-e^5)$
e) $(7t+3s)(7t-3s)$ f) $6(x^2y+z^2)(x^2y-z^2)$
g) geht nicht h) $3(3\phi^2+1)(3\phi^2-1)$

46. a) $(p+q)^2$ b) geht nicht
c) $(2e-1)^2$ d) $(\lambda^2\gamma+1)^2$
e) $(5a^3-2b)^2$ f) $2(m+2)^2(m-2)^2$
g) $-6(2x+1)^2$ h) $-r^2(r-s)^2$

47. a) $(7a-5)(a+5)$ b) $-g(2e+2f+g)$
c) $(v+w+1)(-v-w+1)$ d) $(2a+2b+c)(-2a-2b+c)$
e) $(p+10q+1)(p-10q+1)$ f) $4(m^2-n+5)(m^2+n-5)$

4.5 Lösungen zur Division

4.5.1 Lösungen zum Bruch

5. a) $\frac{3}{2g}$ b) $-\frac{3a}{7d}$ c) $-\frac{4x^3y^3}{3}$ d) $\frac{6m}{5n}$

6. a) $c-6$ b) $3d+5$ c) $\frac{9}{4}x$ d) $\frac{2k-4}{2k+9}$
   e) $\frac{x}{y}$ f) $2v$

7. a) $\frac{5}{x+y}$ b) $c(c-1)$ c) $\frac{m+n}{5}$ d) $\frac{3(2e-1)}{4}$
   e) $\frac{p(p-1)}{q}$ f) $\frac{2z-5}{2(2z+5)}$

10. a) -1 b) $-u$ c) $-\frac{a^2}{a+1}$ d) $-\frac{4}{k+5}$
   e) $-\frac{g+4}{g+6}$ f) $-\frac{2\delta-\varepsilon}{2(2\delta+\varepsilon)}$

13. a) $\frac{k-1}{k+2}$ b) $\frac{a}{-2c-d}$ c) $\frac{x+y-8}{8xy}$ d) $\frac{4\cdot(m-7)}{n}$
   e) $\frac{(r-s)\cdot(r+2s)}{-t} = \frac{(s-r)\cdot(r+2s)}{t}$ f) $\frac{-e^2+5ef-f^2}{-f^2+3ef-e^2}$

14. a) $\frac{x^2}{x^3}$ b) $\frac{4xz}{4x^2z}$ c) $\frac{2a+b}{2ax+bx}$

15. a) $\frac{6}{3c-3d}$ b) $\frac{2(c-d)}{c^2-2cd+d^2}$ c) $\frac{-2}{d-c}$

16. a) $\frac{4(a+b)^2}{4a^2-4b^2}$ b) $-\frac{(a+b)^2}{b^2-a^2}$ c) $\frac{(a+b)(a+3b)}{a^2+2ab-3b^2}$

4.5.2 Lösungen zur Addition und Subtraktion von Brüchen

19. a) $\frac{yz}{2xyz}; \frac{4xz}{2xyz}; \frac{6xy}{2xyz}$ **b)** $\frac{4c^3}{12c^3d^2}; \frac{d^2}{12c^3d^2}$

c) $\frac{(e-2)}{(e^2-4)}; \frac{(e+1)(e+2)}{(e^2-4)}$ **d)** $\frac{g}{3-\mu}; \frac{-3}{3-\mu}$

e) $\frac{1}{x^4-4y^2}; \frac{-x(x^2+2y)}{x^4-4y^2}$ **f)** $\frac{15}{3a+3b}; \frac{20}{3a+3b}; \frac{18}{3a+3b}$

20. a) $\frac{21x}{5}$ **b)** $\frac{5}{4y}$ **c)** $\frac{7z}{4}$ **d)** $-\frac{5}{2a}$

e) 2 **f)** 1 **g)** $\frac{-3(m-2)}{2}$ **h)** $-\frac{1}{r}$

i) 0

21. a) $\frac{71x}{12}$ **b)** $\frac{89y}{55}$ **c)** $\frac{55z}{192}$ **d)** $\frac{29a}{15c}$

e) $\frac{12g-7e}{4efg}$ **f)** $\frac{26p+pq}{2q^2}$

22. a) $\frac{12+k}{4}$ **b)** $\frac{18\vartheta\beta-5}{3\beta}$ **c)** $\frac{3w^2-2w+4}{w}$ **d)** $\frac{2b+74}{7}$

e) $\frac{45c-d}{8}$ **f)** $2m-1$

23. a) $\frac{v(3v-1)}{2(v-1)}$ **b)** $\frac{-x+y-z}{x(y-z)}$ **c)** $\frac{r+9s}{(r+s)(r-s)}$ **d)** $\frac{2a^2+2}{(a+2)(a-3)}$

e) $\frac{-14b^2-6b+10}{(b^2+1)(b^2-5)}$ **f)** $\frac{4-3d}{36(2d-e)}$ **g)** $-\frac{f}{4e(3e+4f)}$ **h)** $\frac{6(1-u)}{u^2-6}$

4.5.3 Lösungen zur Multiplikation und Division von Brüchen

29. a) $2(5a-b)$ b) 4 c) $\frac{3}{xy^5z}$ d) $-2u$
e) $-4ef$ f) 3

30. a) $-\frac{y}{xz}$ b) $\frac{x}{yz}$ c) $\frac{xy}{z}$ d) $\frac{a^3}{2}$
e) $\frac{4e^2}{25f^3g^4}$ f) $\frac{9\delta^3}{2}$ g) $\frac{-3v+2}{w}$ h) $\frac{-3y+4}{22x^2}$
i) $\frac{b}{2c}$

31. a) $\frac{x^2}{2vy}$ b) 30 c) $-\frac{4(q-1)}{3}$ d) $-\frac{2}{c^2d}$

33. a) 1 b) -6 c) $-cd^2$ d) $\frac{56xz}{9y^2}$
e) $\frac{m^2n^2o^2}{p^4q^2}$ f) $\frac{\delta^{10}}{16}$

34. a) $\frac{-g^2}{h^2}$ b) $\frac{128c^2}{243d^2}$ c) $-14vy$ d) $\frac{56}{81\varepsilon^2\phi}$

40. a) $\frac{vy}{wx}$ b) $-\frac{vy}{x}$ c) $-\frac{v}{wx}$ d) $\frac{vy}{wx}$
e) 8 f) $-\frac{5xy^2}{8}$ g) $\frac{2a^2}{c^4}$ h) $-980\alpha^2\beta^3\gamma^2$

41. a) $\frac{2p+1}{2p-1}$ b) $\frac{q}{q-1}$ c) $\frac{fg}{f+g}$ d) $-z^2$